Deben notarse dos cosas con respecto a nuestra solución. Primero, el hecho de que $(6x^2 + 12)dx$ es $2du$ en lugar de du no causa problema; por la linealidad de la integral, el factor 2 pudo colocarse al frente del signo de la integral. Segundo, terminamos con una constante arbitraria $2C$. También ésta es una constante arbitraria; llamémosle K.

(b) Sea $u = x^2 + 4$; entonces $du = 2xdx$. Así,

$$\begin{aligned}\int (x^2+4)^{10}x\,dx &= \int (x^2+4)^{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int u^{10}\,du\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{11}}{11}+C\right)\\ &= \frac{(x^2+4)^{11}}{22}+K\end{aligned}$$

■

Revisión de conceptos

1. La regla de la potencia para derivadas dice que $d(x^r)/dx =$ ________. La regla de la potencia para integrales dice que $\int x^r\,dx =$ ______.

2. La regla generalizada de la potencia para derivadas dice que $d[f(x)]^r/dx =$ ________. La regla generalizada de la potencia para integrales dice que $\int$ _____ $dx = [f(x)]^{r+1}/(r+1) + C,\ r \neq -1$.

3. $\int (x^4 + 3x^2 + 1)^8(4x^3 + 6x)\,dx =$ _____.

4. Con base en la linealidad, $\int [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\,dx =$ _____.

Conjunto de problemas 3.8

Encuentre la antiderivada general F(x) + C para cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 5$

2. $f(x) = x - 4$

3. $f(x) = x^2 + \pi$

4. $f(x) = 3x^2 + \sqrt{3}$

5. $f(x) = x^{5/4}$

6. $f(x) = 3x^{2/3}$

7. $f(x) = 1/\sqrt[3]{x^2}$

8. $f(x) = 7x^{-3/4}$

9. $f(x) = x^2 - x$

10. $f(x) = 3x^2 - \pi x$

11. $f(x) = 4x^5 - x^3$

12. $f(x) = x^{100} + x^{99}$

13. $f(x) = 27x^7 + 3x^5 - 45x^3 + \sqrt{2}x$

14. $f(x) = x^2\left(x^3 + 5x^2 - 3x + \sqrt{3}\right)$

15. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$

16. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}}{x} + \dfrac{3}{x^5}$

17. $f(x) = \dfrac{4x^6 + 3x^4}{x^3}$

18. $f(x) = \dfrac{x^6 - x}{x^3}$

En los problemas del 19 al 26 evalúe las integrales indefinidas que se indican.

19. $\int (x^2 + x)\,dx$

20. $\int \left(x^3 + \sqrt{x}\right)dx$

21. $\int (x+1)^2\,dx$

22. $\int \left(z + \sqrt{2}z\right)^2 dz$

23. $\int \dfrac{(z^2+1)^2}{\sqrt{z}}\,dz$

24. $\int \dfrac{s(s+1)^2}{\sqrt{s}}\,ds$

25. $\int (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)\,d\theta$

26. $\int (t^2 - 2\cos t)\,dt$

En los problemas del 27 al 36 utilice los métodos de los ejemplos 5 y 6 para evaluar las integrales indefinidas.

27. $\int \left(\sqrt{2}x + 1\right)^3\sqrt{2}\,dx$

28. $\int (\pi x^3 + 1)^4 3\pi x^2\,dx$

29. $\int (5x^2 + 1)(5x^3 + 3x - 8)^6\,dx$

30. $\int (5x^2 + 1)\sqrt{5x^3 + 3x - 2}\,dx$

31. $\int 3t\sqrt[3]{2t^2 - 11}\,dt$

32. $\int \dfrac{3y}{\sqrt{2y^2 + 5}}\,dy$

33. $\int x^2\sqrt{x^3 + 4}\,dx$

34. $\int (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2}\,dx$

35. $\int \operatorname{sen} x\,(1 + \cos x)^4\,dx$

36. $\int \operatorname{sen} x \cos x\,\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x}\,dx$

En los problemas del 37 al 42 se da $f''(x)$. Encuentre $f(x)$ antiderivando dos veces. Observe que en este caso su respuesta debe incluir dos constantes arbitrarias, una proveniente de cada antiderivación. Por ejemplo, si $f''(x) = x$, entonces $f'(x) = x^2/2 + C_1$ y $f(x) = x^3/6 + C_1x + C_2$. Las constantes C_1 y C_2 no pueden combinarse porque C_1x no es una constante.

37. $f''(x) = 3x + 1$

38. $f''(x) = -2x + 3$

39. $f''(x) = \sqrt{x}$

40. $f''(x) = x^{4/3}$

41. $f''(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3}$

42. $f''(x) = 2\sqrt[3]{x + 1}$

43. Demuestre la fórmula

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x) + C$$

Sugerencia: véase el recuadro al margen junto al teorema A.

44. Demuestre la fórmula

$$\int \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\,dx = \frac{f(x)}{g(x)} + C$$

45. Utilice la fórmula del problema 43 para encontrar

$$\int \left[\frac{x^2}{2\sqrt{x - 1}} + 2x\sqrt{x - 1}\right] dx$$

46. Utilice la fórmula del problema 43 para encontrar

$$\int \left[\frac{-x^3}{(2x + 5)^{3/2}} + \frac{3x^2}{\sqrt{2x + 5}}\right] dx$$

47. Encuentre $\int f''(x)\,dx$ si $f(x) = x\sqrt{x^3 + 1}$.

48. Demuestre la fórmula

$$\int \frac{2g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{2[g(x)]^{3/2}} = \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} + C$$

49. Demuestre la fórmula

$$\int f^{m-1}(x)g^{n-1}(x)[nf(x)g'(x) + mg(x)f'(x)]\,dx = f^m(x)g^n(x) + C$$

50. Evalúe la integral indefinida

$$\int \operatorname{sen}^3[(x^2 + 1)^4] \cos[(x^2 + 1)^4](x^2 + 1)^3 x\,dx$$

Sugerencia: sea $u = \operatorname{sen}(x^2 + 1)^4$.

51. Evalúe $\int |x|\,dx$.

52. Evalúe $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$.

CAS **53.** Algunos paquetes de software pueden evaluar integrales indefinidas. Utilice su software en cada una de las siguientes integrales.

(a) $\int 6\operatorname{sen}(3(x - 2))\,dx$

(b) $\int \operatorname{sen}^3(x/6)\,dx$

(c) $\int (x^2 \cos 2x + x \operatorname{sen} 2x)\,dx$

EXPL CAS **54.** Sea $F_0(x) = x \operatorname{sen} x$ y $F_{n+1}(x) = \int F_n(x)\,dx$.

(a) Determine $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, y $F_4(x)$.

(b) Con base en la parte (a) realice una conjetura sobre la forma de $F_{16}(x)$.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** rx^{r-1}; $x^{r+1}/(r + 1) + C, r \neq -1$ **2.** $r[f(x)]^{r-1}f'(x)$; $[f(x)]^r f'(x)$ **3.** $(x^4 + 3x^2 + 1)^9/9 + C$ **4.** $c_1\int f(x)\,dx + c_2\int g(x)\,dx$

3.9 Introducción a ecuaciones diferenciales

En la sección precedente, nuestra tarea fue antiderivar (integrar) una función f para obtener una nueva función F. Escribimos

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

y, por definición, esto fue correcto siempre y cuando $F'(x) = f(x)$. Ahora $F'(x) = f(x)$ en el lenguaje de derivadas es equivalente a $dF(x) = f(x)dx$ en el lenguaje de diferenciales (véase la sección 2.9). Por lo tanto, podemos interpretar la fórmula del recuadro como

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C}$$

Desde esta perspectiva, integramos la diferencial de una función para obtener la función (más una constante). Éste fue el punto de vista de Leibniz; adoptarlo nos ayudará a resolver *ecuaciones diferenciales*.

¿Qué es una ecuación diferencial? Para motivar nuestra respuesta, empezamos con un ejemplo sencillo.

EJEMPLO 1 Encuentre una ecuación, en x y y, de la curva que pasa por el punto $(-1, 2)$ y cuya pendiente en cualquier punto de la curva es igual a dos veces la abscisa (coordenada x) de ese punto.